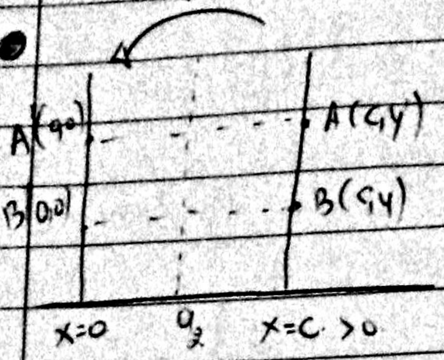
$H^2 \to H^2$

f ισομετρικός

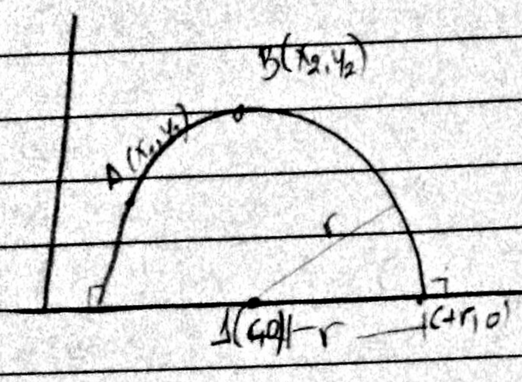


$d(A,B) = d(f(A), f(B))$

$d(A',B') = k\left|\ln\left|\left(\frac{y'}{y}\right)\right|\right| = k\left|\ln\left(\frac{y'}{y}\right)\right| \overset{y'>y}{=} k\ln\left(\frac{y'}{y}\right)$

f ισομετρία

$d(A,B) = d(f(A), f(B)) = d(A',B') = k\left|\ln\left(\frac{y'}{y}\right)\right|$



$A, B \subset K(a,r)$

νέα … B' τύπου

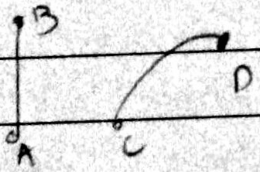
τύπος υπερβολικής απόστασης:

$d(A,B) = k\left|\left(\ln\left|\frac{y_2(x_1-r-c)}{y_1(x_2-r-c)}\right|\right)\right|$

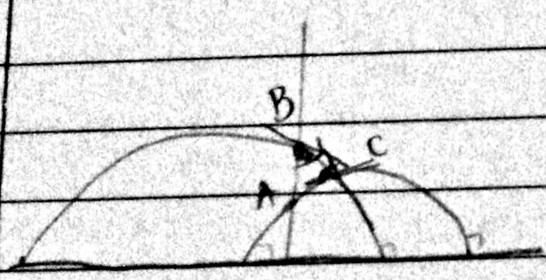
[Συνάρτηση 1-1]

$c \in \mathbb{R}$

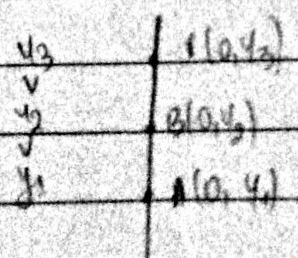
$r > 0$



$AB = CD \Leftrightarrow d(A,B) = d(C,D)$



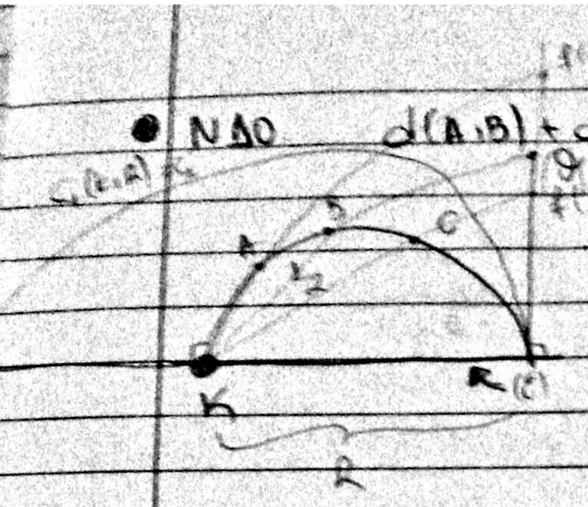
Ακτίνα



$d(A,B) + d(B,C) = \begin{cases} d(A,B) = \left|\ln \frac{y_2}{y_1}\right| = \ln y_2 - \ln y_1 \\ d(B,C) = \ln(y_3) - \ln(y_2) \end{cases}$

$\ln(y_3) - \ln(y_1) = d(A,C)$

• ΝΔΟ $d(A,B)+d(B,C)=d(A,C)$



α) έστω ... του τύπου

β) γεωμετρικά: φέρνω ευθεία, εκφράζω κύκλο με R δηλ. $C_1(K,R)=C_1$

f: αντιστροφή ως προς τον κύκλο $C_1(K,R)$

$f(\Delta)=\Delta$ & $f(C)=C'$

$f(E)=E$ & $f(A)=A'$

$f(\theta)=\theta$ & $f(B)=B$

$d(B,C)=d(B,C')$

$d(A,B)=d(A',B')$

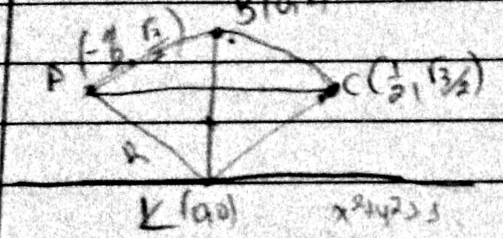
$d(A,C)=d(A',C')$

Άρα $d(A,B)+d(B,C)=d(A',C')=d(A,C)$

▶ Ασκήσεις

① Δίνονται τα σημεία $A(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(0,1)$, $C(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

ΝΔΟ B βρίσκεται μεταξύ A, C (στο H^2) (δηλ. γιατί σε είναι συνευθειακά κ' ανήκουν στην ίδια ευθεία)



α) να βρω τις αποστάσεις από το O ... = 1

β) γεωμετρικά να φέρω:

$x=0$: μεσοκάθετος του AB

$\lambda=0$ τέμνει στον οριζόντιο (0,0)

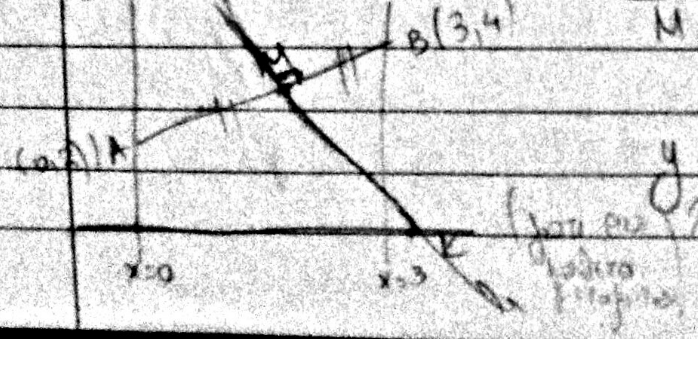
$K(0,0)$ κέντρο του ημικυκλίου που ζητ.

$r=|CK|=1=1$

$l=\begin{cases}x^2+y^2=1\\ y>0\end{cases}$ Υ-ευθεία 2ου τύπου

$B(0,1)\in l$ $\quad -\frac{1}{2}<0<\frac{1}{2}$ άρα $A*B*C$

② Βρείτε την ευθεία που: (2 τρόποι)



$M=\left(\frac{3+0}{2},\frac{4+2}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},3\right)$

$y-3=\lambda\left(x-\frac{3}{2}\right)$

γιατί είναι κάθετα $\lambda_{AB}\,\lambda_{\varepsilon}=-1 \Rightarrow \frac{4-2}{3-0}\lambda_{\varepsilon}=-1 \Rightarrow \lambda=-\frac{3}{2}$

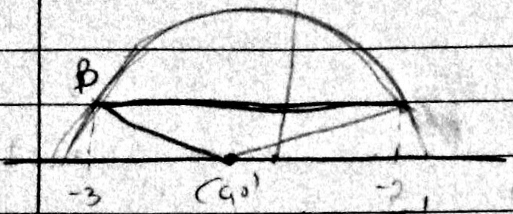
Άρα $l_1: y-3 = -\frac{3}{2}(x-3)$

Μετά βρίσκουμε το σημείο που τέμνει τον οριζόντα $y=0$.

$K(7/2, 0)$, $r = |KA| = |(0,2),(7/2,0)| = \frac{\sqrt{65}}{2}$

$(x-\frac{7}{2})^2 + y^2 = \frac{65}{4}$, $y>0$

(β' τρόπος) ③ Βρείτε την $d(A,B) =;$ υπερβολική απόσταση για $A(2,1)$, $B(-3,1)$



$(x-c)^2+y^2=r^2$, $r>0$, $c\in\mathbb{R}$

① $(2-c)^2+1^2=r^2$

② $(-3-c)^2+1^2=r^2$

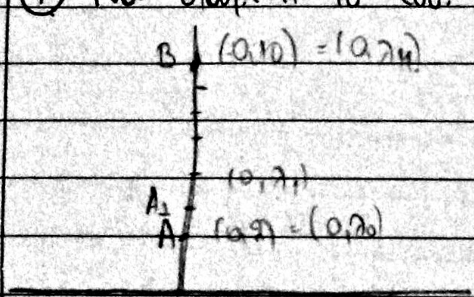
$\Rightarrow (2-c)^2=(-3-c)^2$

$|2-c| = |3-c|$ { $2-c=3+c$ / $2-c=-3-c$ $\Rightarrow c=-1/2$

Άρα $K(-1/2, 0)$

① και ② $\Rightarrow r^2 = \frac{29}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{29}}{2}$

! ④ Να διαιρεθεί το ευθ. τμήμα (υπερβολικό) $[2i, 10i]$ σε 4 ίσα υπερβολικά τμήματα



$\lambda_0 = 2$

λ_1

λ_2

$d(\lambda_k i, \lambda_{k+1} i) = d((0,\lambda_k),(0,\lambda_{k+1}))$

$= \frac{d(A,B)}{4} = \frac{|\ln|\frac{10}{2}||}{4} = \frac{\ln 5}{4}$

$d(A,A_1) = \frac{1}{4} d(A,B) = \frac{1}{4}\ln 5$

$\Rightarrow \ln\frac{\lambda_1}{2} = \frac{1}{4}\ln 5$

(γ) $\forall,\ 1<k<4 \Rightarrow \lambda_k =;$

$d((0,2),(0,\lambda_k)) \overset{k\in\mathbb{N}}{=} k\frac{1}{4} d(A,B)$

$\lambda_k > 2$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{\lambda_k}{2}\right) = \frac{k}{4}\ln 5 \Rightarrow \frac{\lambda_k}{2} = 5^{\frac{k}{4}} \Rightarrow \lambda_k = 2\cdot 5^{\frac{k}{4}}$, $k=0$

$\lambda_0 = 2$

$\lambda_4 = 10$